Θέματα

1. (α) Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} y' = 2t, & t \in [0, 1], \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Για ομοιόμορφη διαμέριση, να δείξετε ότι η ακρίβεια της μεθόδου του Euler γι' αυτό το πρόβλημα αρχικών τιμών είναι ακριβώς ένα (1.25 μονάδες).
(β) Να εκτιμήσετε για το παραπάνω πρόβλημα αρχικών τιμών τη συνέπεια της μεθόδου του Euler για την ίδια ομοιόμορφη διαμέριση (1.25 μονάδες).

2. (α) Να δείξετε ότι η μέθοδος Runge-Kutta (πεπλεγμένη μέθοδος του μέσου) με μητρώο:
$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$ έχει τάξη ακρίβειας δύο (1.25 μονάδες).
(β) (*i*) Να περιγράψετε τη συνάρτηση ευστάθειας για μια άμεση μέθοδο Runge-Kutta που έχει τάξη ακρίβειας p και αποτελείται από q στάδια (με $p < q$). (*ii*) Να βρεθεί η περιοχή απόλυτης ευστάθειας των Runge-Kutta μεθόδων με τάξη ακρίβειας 1, 2 και 3 των οποίων το πλήθος των συναρτησιακών υπολογισμών συμπίπτει με την τάξη της μεθόδου (1.25 μονάδες).

3. (α) Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t), & t \geq 0, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{2}$$

Με $A \in \mathbb{R}^{m,m}$ ένας μη θετικά ορισμένος πίνακας, $(Ax, x) \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^m$. Αν y^n η προσέγγιση της $y(t^n)$ με την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler και $t^n = nh$, να δείξετε ότι $\|y^{n+1}\| \leq \|y^n\|$, $n \in \mathbb{N}^*$ (όπου $\|.\|$ η Ευκλείδια νόρμα) (1.25 μονάδες).
(β) Θεωρήστε το εξής πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t), & t \geq 0, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{3}$$

Να δείξετε ότι η μέθοδος του μέσου είναι B-ευσταθής μέθοδος (1.25 μονάδες).

4. (α) (*i*) Πότε μια μέθοδος Runge-Kutta ονομάζεται αλγεβρικά ευσταθής; (*ii*) Να δείξετε ότι η μέθοδος Runge-Kutta με μητρώο: $\begin{array}{cc|c} \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 1 \\ \hline \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \end{array}$ είναι αλγεβρικά ευσταθής (1.25 μονάδες).
(β) Είναι η τριβηματική μέθοδος που περιγράφεται από τις σταθερές:

$$\alpha_3 = 1, \alpha_2 = -\frac{11}{6}, \alpha_1 = 1, \alpha_0 = -\frac{1}{6}, \beta_3 = \frac{1}{12}, \beta_2 = \frac{1}{6}, \beta_1 = -\frac{1}{2}, \beta_0 = \frac{7}{12} \tag{4}$$

10/09/2015

ευστ... (1.25 μονάδες)